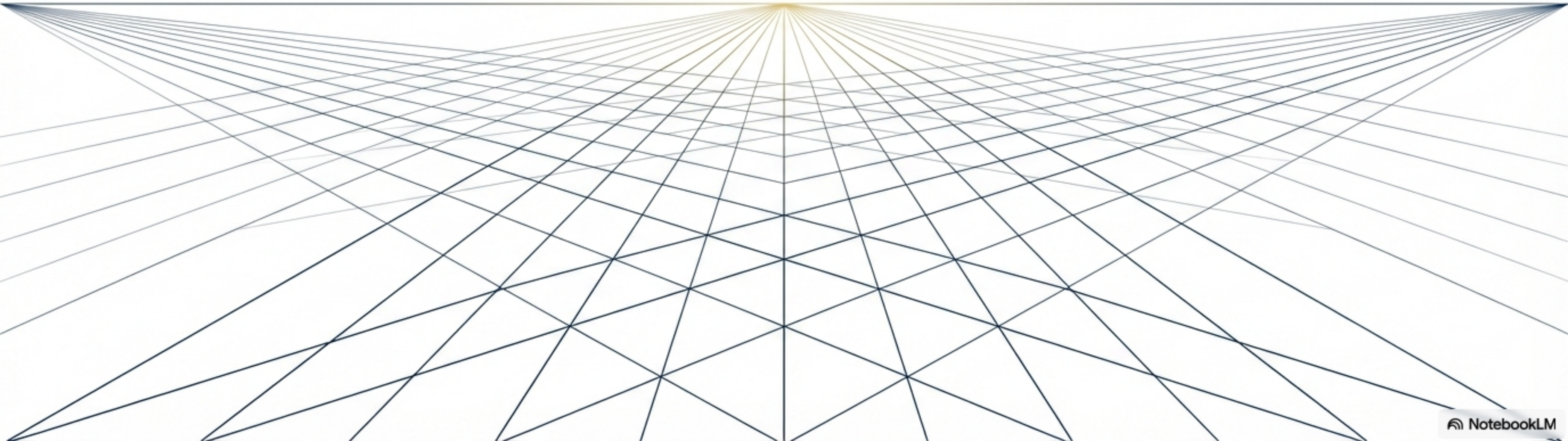


3D Projektif Geometri: Dünyayı Sayılarla İnşa Etmek

Hartley & Zisserman Bölüm 3 Üzerine Derinlemesine Bir İnceleme



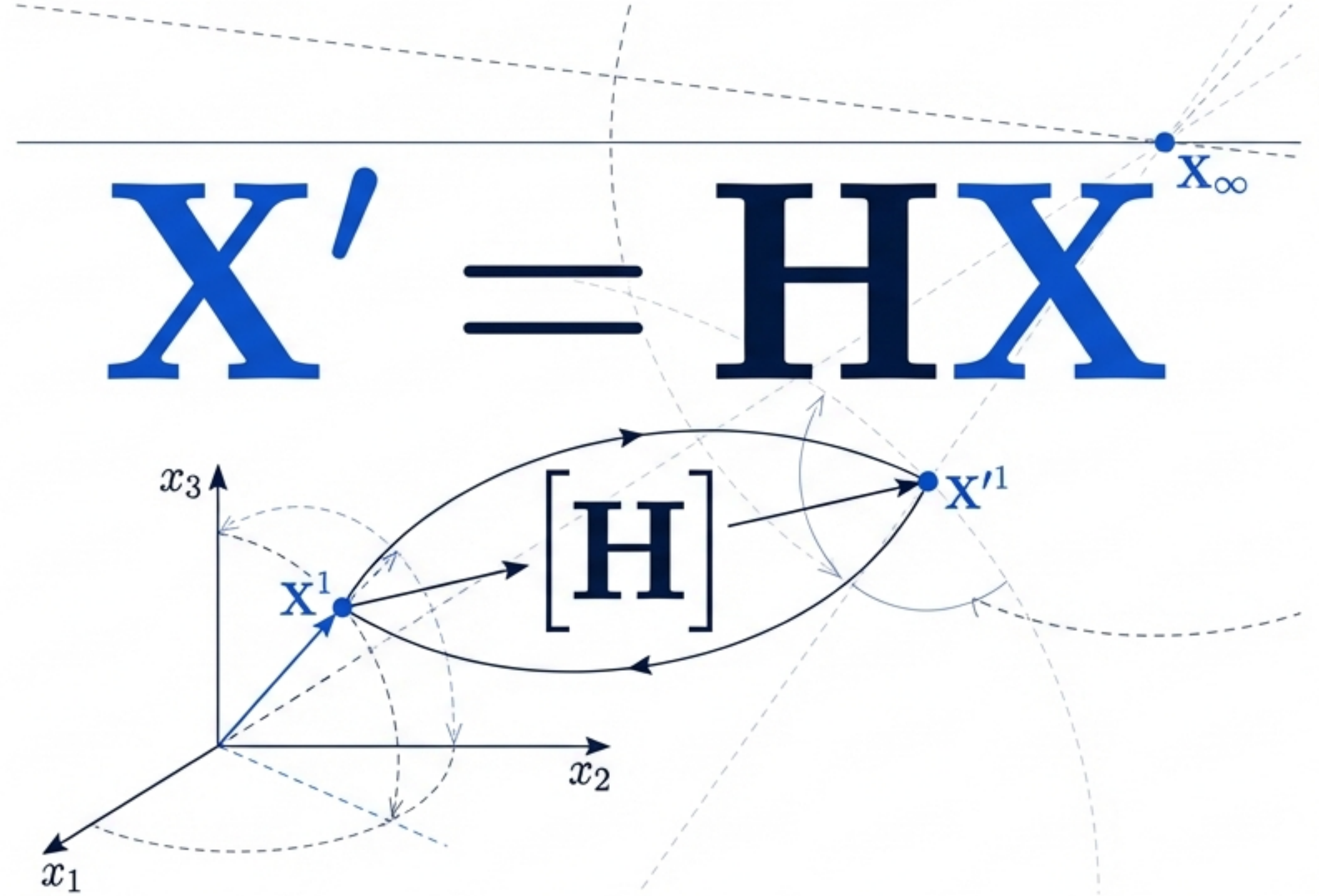
Noktalar ve Dönüşümler ($\mathbb{P}^3$)

Öklid uzayını ($\mathbb{R}^3$) sonsuzdaki noktalarla genişleterek $\mathbb{P}^3$ 'ü inşa ediyoruz.

Noktalar Temsil: 3D uzaydaki bir nokta 4-vektör ile ifade edilir:
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$.
Son koordinat ($X_4 = 0$) sonsuzdaki ideal noktaları belirtir.

Projektif Dönüşüm (Homografi):
Noktalar 4×4 boyutunda, tekil olmayan bir matris ile dönüştürülür.

Serbestlik Derecesi (DOF):
 $\mathbf{H}$ matrisi 15 bağımsız serbestlik derecesine sahiptir. Bu, 3D uzayın en esnek halidir.



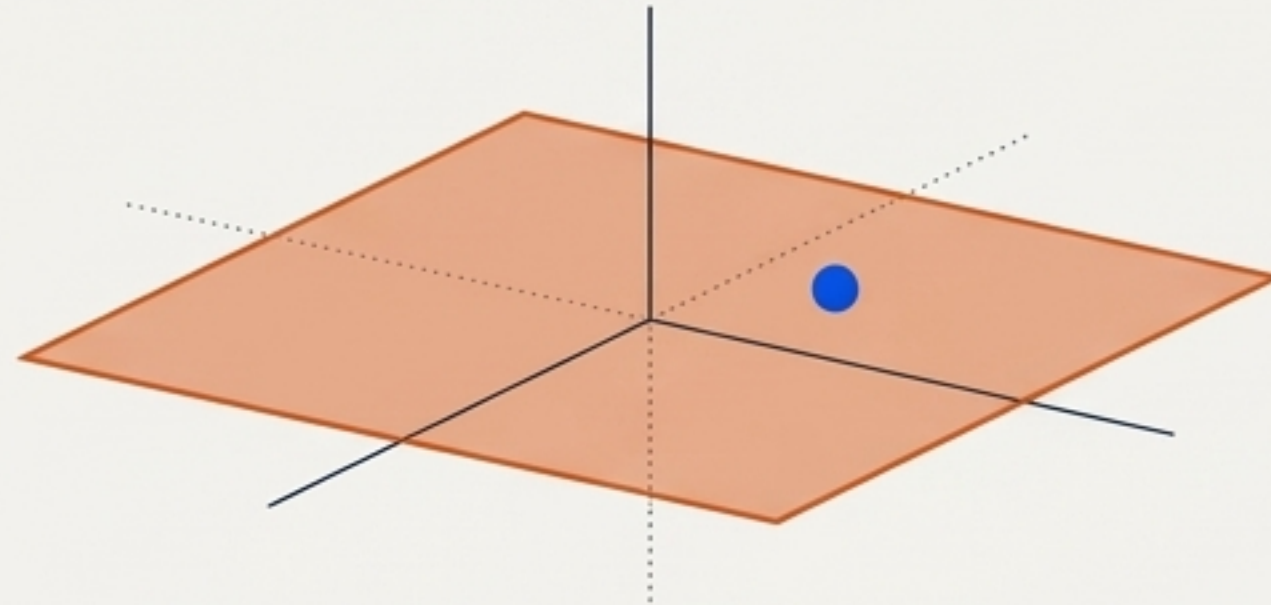
Düzlemlerin Matematiği ve Dualite

$\mathbb{P}^3$ 'te **noktalar** ve **düzlemler** mükemmel bir simetriye (dualiteye) sahiptir. Biri sütun vektörü, diğeri satır vektörüdür. Bir **düzlem** 4-vektör ile temsil edilir: $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)^T$. İlk 3 bileşen normal vektörünü, π_4 ise mesafeyi temsil eder.

İnsidans (Üzerinde Olma) Denklemi: Bir noktanın düzlem üzerinde olması iç çarpımın sıfır olması demektir.

Dönüşüm Kuralı: **Noktalar** $X' = H X$ ile dönüşürken, düzlemler geometriyi korumak için H^{-T} ile dönüşür: $\pi' = H^{-T} \pi$.

$$\pi^T X = 0$$

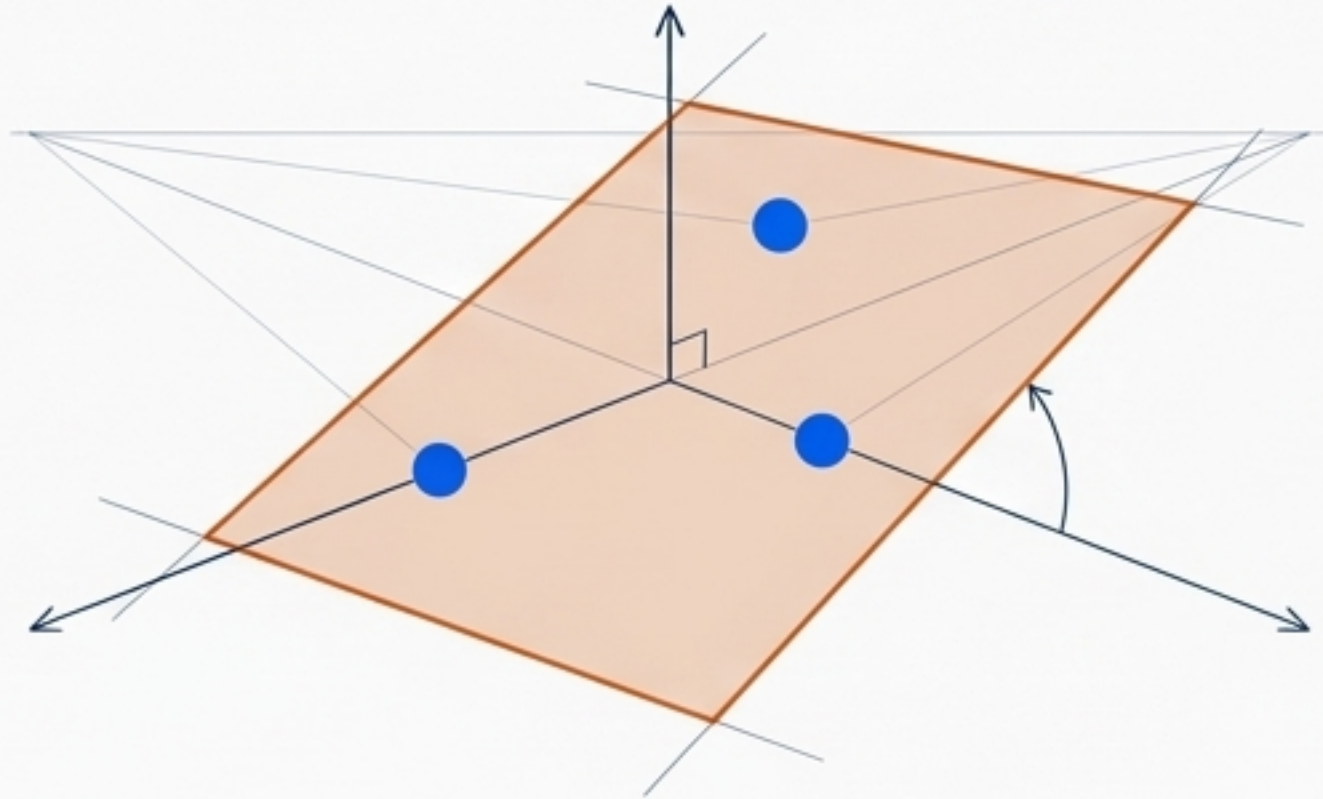


Kesişimler ve Kapsamalar: Sıfır Uzayının Gücü

3 Nokta Bir Düzlem Tanımlar

$$M\pi = 0$$

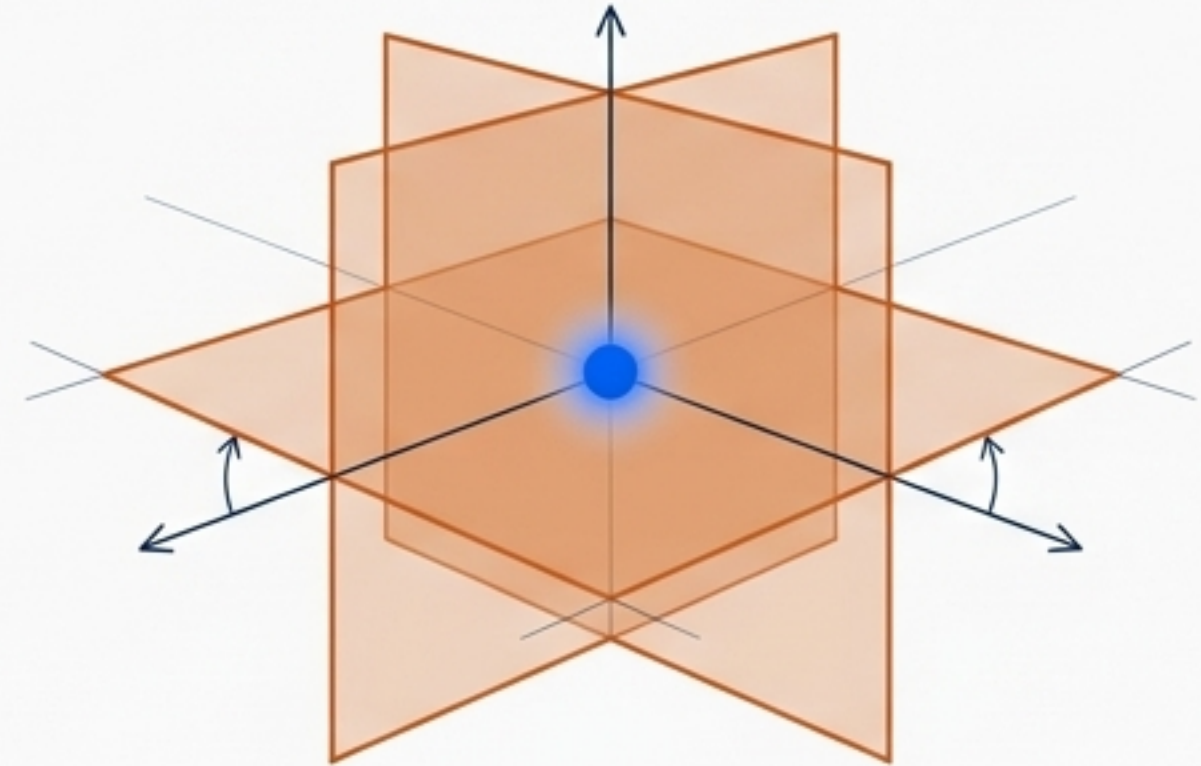
Noktaların sağ sıfır uzayı (null-space) düzlemi verir.



3 Düzlem Bir Noktada Kesişir

$$MX = 0$$

Düzlemlerin sağ sıfır uzayı noktayı tanımlar.



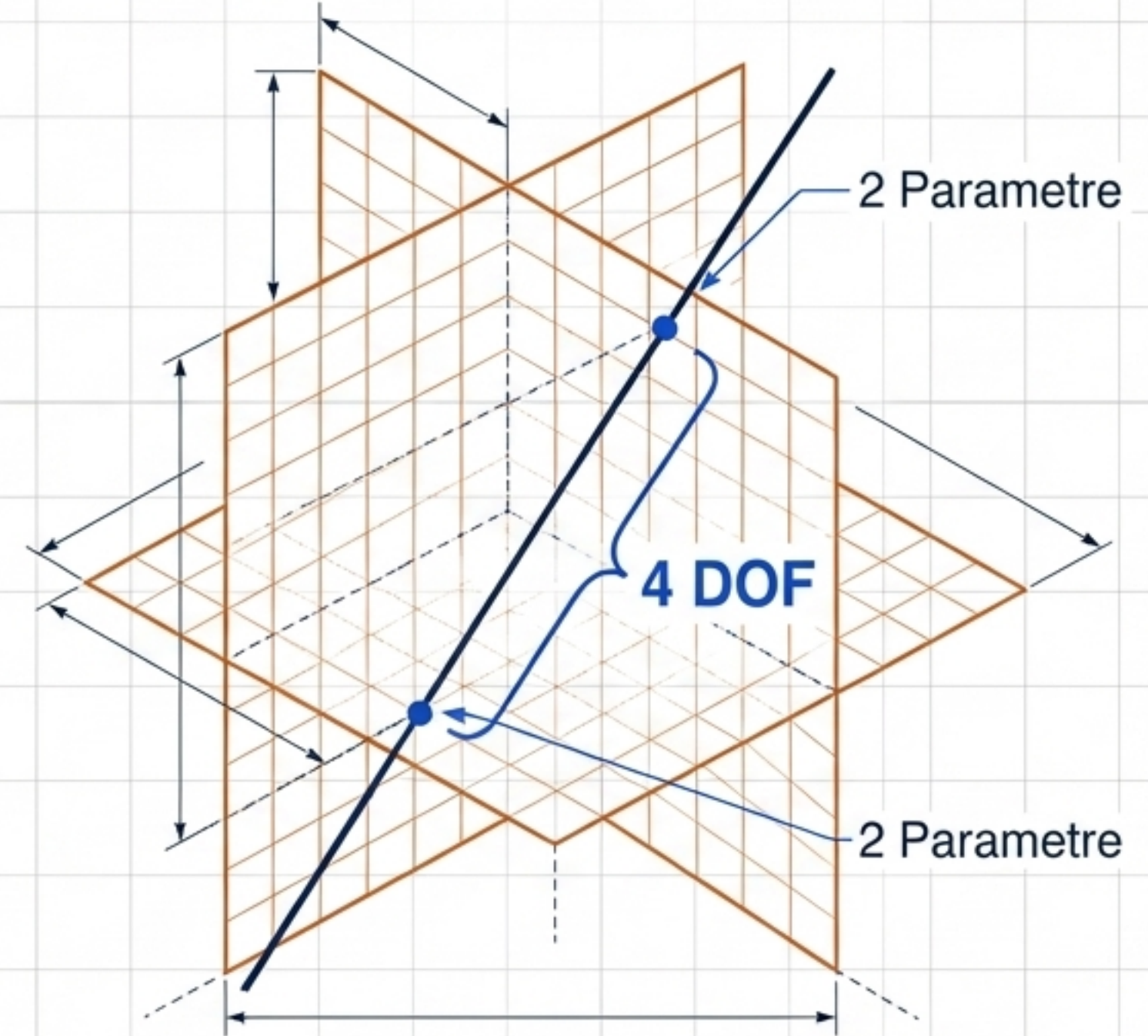
3D Uzayda Doğrular (Neden 4 DOF?)

Noktalar (Cobalt Blue) ve düzlemler (Burnt Orange) 3 serbestlik derecesine sahipken, IP^3 'teki bir doğrunun 4 serbestlik derecesi vardır.

Bir doğruyu birbirine dik iki düzlemle (Burnt Orange) kestiğimizi düşünün. Her bir düzlemdeki kesişim noktası (Cobalt Blue) 2 parametre ile belirlenir ($2 + 2 = 4$ DOF).

Temsil Zorluğu: 4 DOF'a sahip bir obje, 4-vektör ile kolayca ifade edilemez.

Çözüm Yolu (Span): Bir doğru, üzerindeki iki noktanın (Cobalt Blue) veya onu kapsayan iki düzlemin (Burnt Orange) doğrusal kombinasyonu (span) olarak tanımlanır.



Plücker Matrisleri: Doğruların Formülü

Doğruları sistemlere dahil etmenin en şık yolu onları 4×4 anti-simetrik matrisler olarak yazmaktır.

- Noktalardan Doğruya: **A** ve **B** noktalarından geçen doğru **L** matrisi ile ifade edilir.
- Noktalardan Doğruya: **A** ve **B** noktalarından geçen doğru **L** matrisi ile ifade edilir.
- Düzlemlerden Doğruya (Dual Plücker): **P** ve **Q** düzlemlerinin kesişimi olan doğru **L*** ile ifade edilir.
- Dönüşümler: Plücker matrisi $L' = H L H^T$ olarak dönüşür.

$$L = AB^T - BA^T$$

$$L^* = PQ^T - QP^T$$

Plücker Koordinatları ve İnsidans

4×4 anti-simetrik L matrisinin 6 bağımsız elemanı
'Plücker Koordinatları'nı oluşturur:

$$l_{12}l_{34} + l_{13}l_{42} + l_{14}l_{23} = 0$$

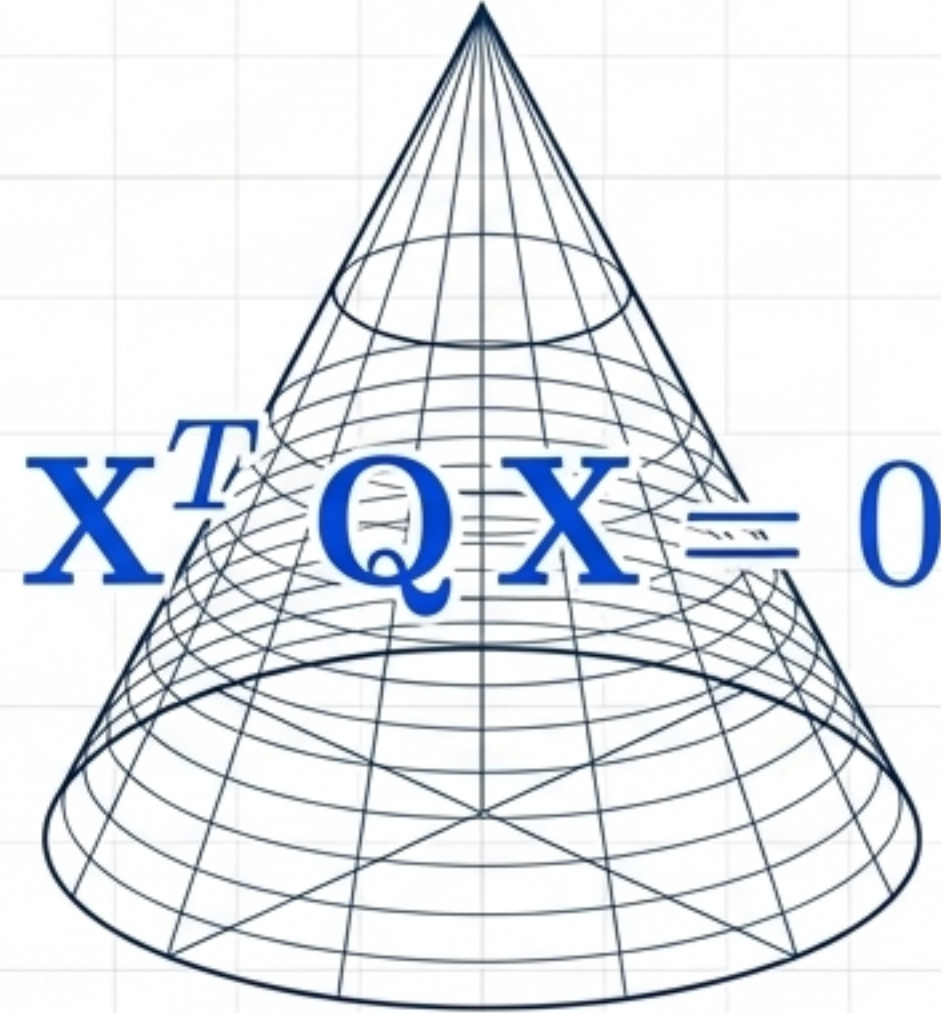
$$\mathcal{L} = \{l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{42}, l_{34}\}$$

Kesişim Testi: İki doğrunun 3D uzayda kesişip kesişmediğini bilineer bir çarpım ile test ederiz:

$$(\mathbf{L} \mid \mathbf{L}') = 0$$

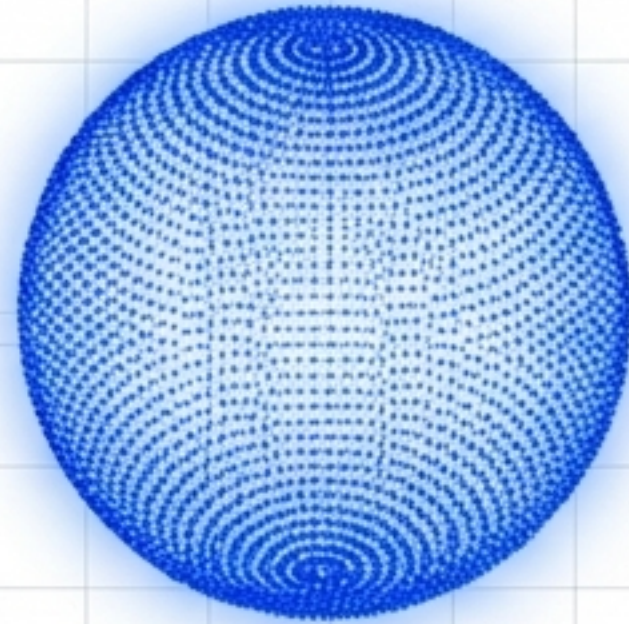
Kuadrikler: 3D Yüzeyleri Şekillendirmek

- Mimari yapı taşımız 2. dereceden yüzeylerdir.
- Bir kuadrik $\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = 0$ denklemi ile tanımlanır. $\mathbf{Q}$, 4×4 boyutunda simetrik bir matristir.
- Kutup (Polar) ilişkisi: $\mathbf{X}$ noktasının $\mathbf{Q}$ kuadriğine göre teğet düzlemi $\pi = \mathbf{Q} \mathbf{X}$ ile bulunur.
- Dönüşüm kuralı: $\mathbf{Q}' = \mathbf{H}^{-T} \mathbf{Q} \mathbf{H}^{-1}$

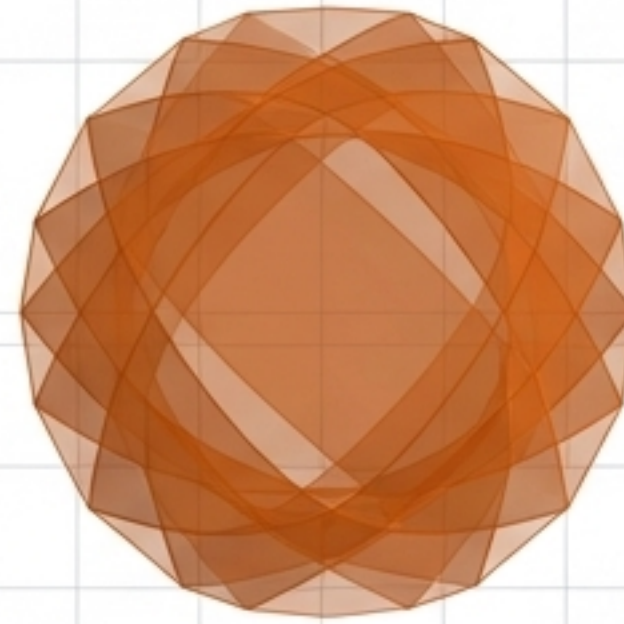


Çiftel (Dual) Kuadrikler: Yüzey Zarfı

- Bir yüzeyi noktaların birleşimi olarak değil, o yüzeye teğet olan düzlemlerin bir zarfı (envelope) olarak tanımlayabiliriz.
- Çiftel kuadrikler düzlemler üzerinde çalışır: $\pi^T Q^* \pi = 0$.
- Dönüşüm kuralı çok daha doğaldır: $Q^{*'} = H Q^* H^T$.
- Kritik Avantaj: Kamera izdüşümünün matematiği çiftel kuadriklerde çok daha basittir.



NOKTA KUADRİK

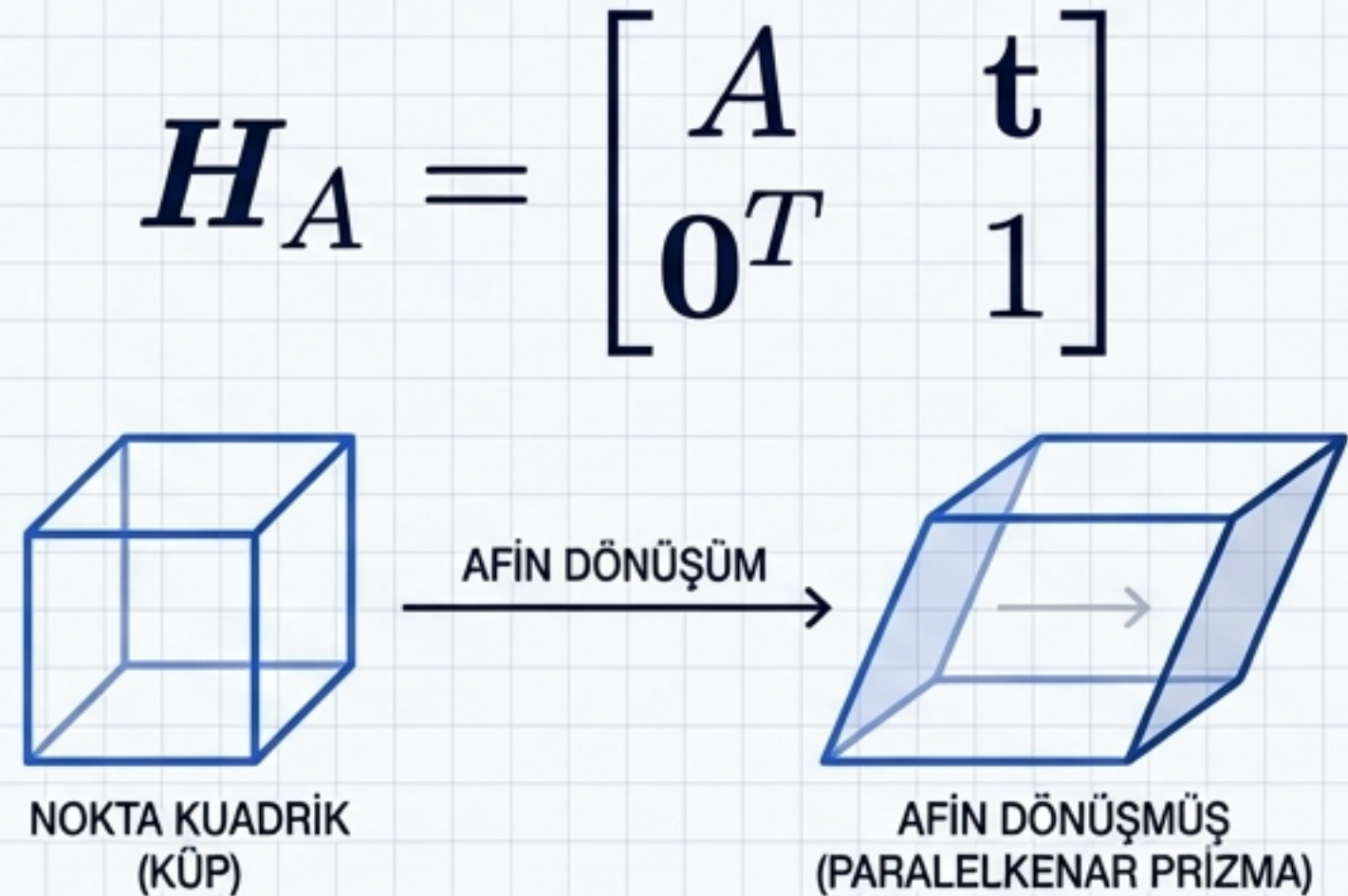


ÇİFTEL KUADRİK (ZARF)

$$C^* = P Q^* P^T$$

Evrenin Kuralları: Projektiften Afine

- Uzayımız şu an çok esnek (Projektif - 15 DOF). Hiyerarşide aşağı inerek evrenimize metrik kurallar koyuyoruz.
- **Afin Dönüşüm (12 DOF):** Matrisin son satırı $[0, 0, 0, 1]$ formuna kısıtlandığında Afin uzaya geçeriz.
- **Ne Korunur?** Paralellik, hacim oranları ve kütle merkezleri artık değişmezdir. Küpler paralelkenar prizmalara dönüşebilir, ancak zıt yüzeyler daima paralel kalır.



$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_A \mathbf{x}$$

Evrenin Kuralları: Benzerlikten Öklid'e



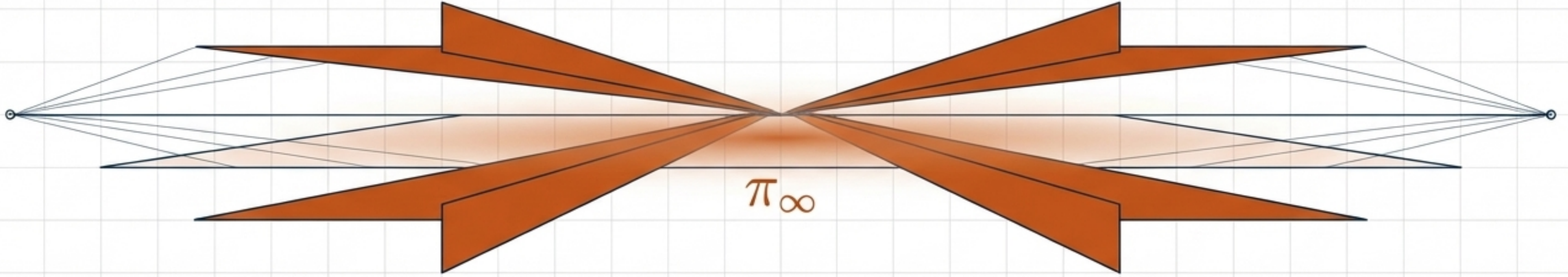
- **Benzerlik Dönüşümü (7 DOF):** Afin dönüşüme ortogonal rotasyon ve izotropik ölçek (s) kısıtlaması ekleriz.
- **Ne Korunur?** Açılar ve şekiller korunur. “Metrik Rekonstrüksiyon” seviyesi burasıdır.

Ortogonal Rotasyon Öteleme

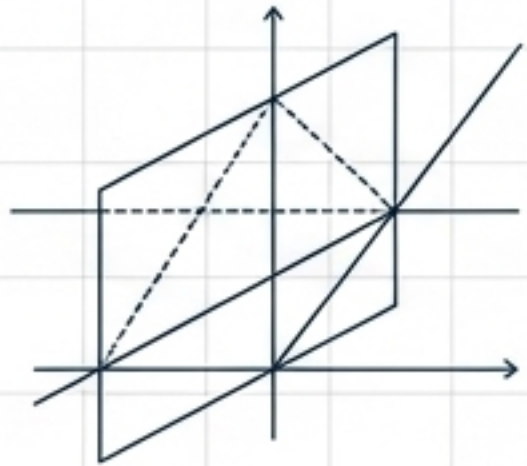
$$H_S = \begin{bmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

- **Öklid Dönüşümü (6 DOF):** Ölçek $s=1$ yapıldığında, rijit cisim hareketleri elde edilir. Hacim ve uzunluklar sabittir. Dünyayı algıladığımız gerçek halidir.

Sonsuzdaki Düzlem (π_∞): Paralelliğin Koruyucusu



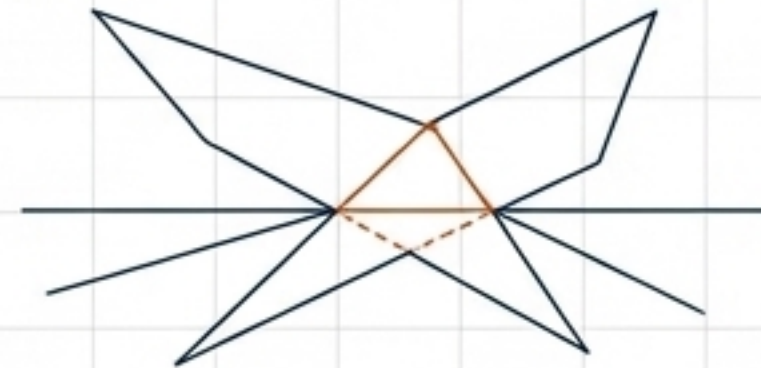
- Afin uzayın yapısını koruyan **evrensel** sabittir.



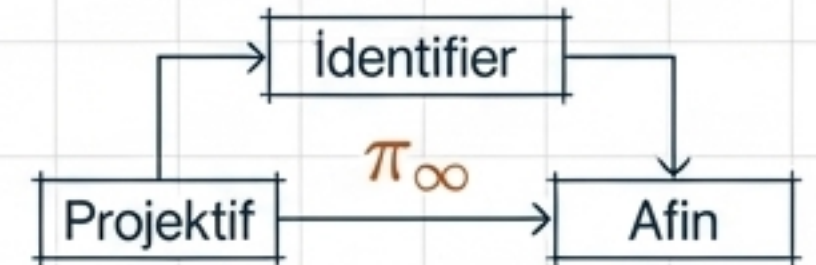
- Kanonik koordinatları sabittir:

$$\pi_\infty = (0, 0, 0, 1)^T.$$

- Neden önemlidir? Herhangi iki paralel düzlem kesinlikle π_∞ üzerindeki bir çizgide kesişir.

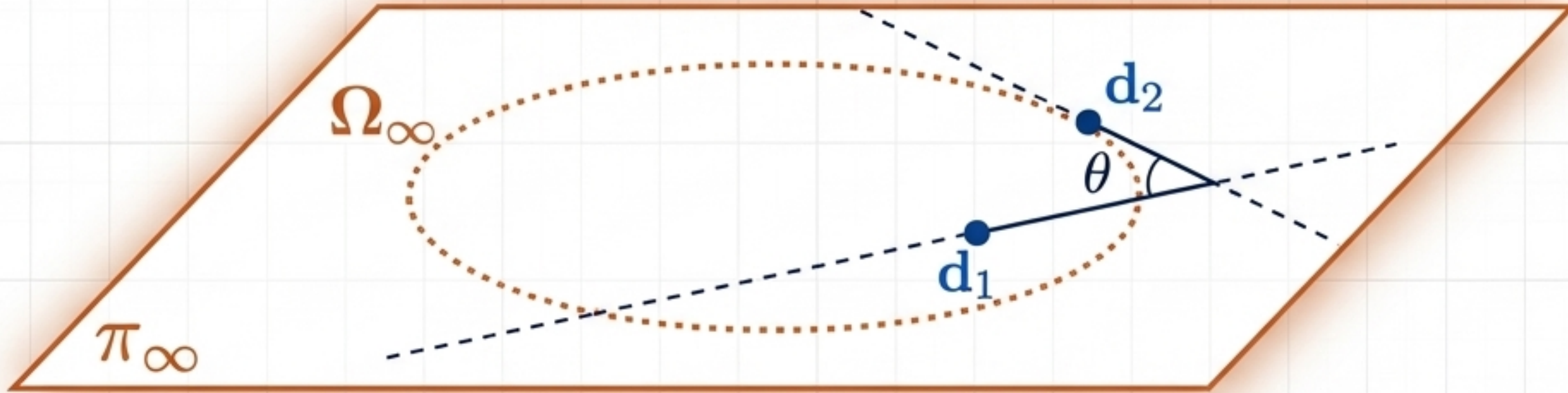


- Bu düzlemin yerini tespit ettiğiniz an, **projektif eğriliği yok edip** sistemi Afin yapıya indirebilirsiniz.



Mutlak Konik (Ω_∞): Metrik Sabit

- Benzerlik (Metrik) yapısının koruyucusudur. Sadece π_∞ üzerinde yaşayan sanal bir koniktir.
- Öklid uzayında matris temsili birim matristir: $\Omega_\infty = \mathbf{I}$.
- İki 3D doğrunun yönleri arasındaki mutlak açı, Ω_∞ üzerinden hesaplanır:



$$\cos \theta = \frac{\mathbf{d}_1^T \Omega_\infty \mathbf{d}_2}{\sqrt{(\mathbf{d}_1^T \Omega_\infty \mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2^T \Omega_\infty \mathbf{d}_2)}}$$

- Ω_∞ 'u bulmak, metrik gerçeği bulmaktır.

Mutlak Çiftel Kuadrik (Q_{∞}^*): Kutsal Kâse

- π_{∞} ve Ω_{∞} kavramlarını tek bir objede birleştiren başyapıt: **Boş uzayı** π_{∞} olan bu zarf.
- **Sihirli Özelliği:** Sadece **Benzerlik (Similarity)** dönüşümleri altında sabit kalır.
- **Oto-Kalibrasyonun Temeli:** Görüntü mutlak koniği, direkt olarak Q_{∞}^* 'un kamera matrisi **P** ile izdüşümüdür.
- Bilgisayarlı görüde, Q_{∞}^* 'u tahmin etmek kameranın iç parametrelerini (**K**) çözmek demektir.

$$\omega^* = P Q_{\infty}^* P^T = K K^T$$

Büyük Resim: Projektiften Metrik Dünyaya

- **Mimarın Araç Çantası Tamamlandı:** Noktalar ve düzlemler arasındaki zarafetten (Dualite: Cobalt Blue & Burnt Orange), **Plücker** matrislerine uzanan bir evren inşa ettik.
- **Neden Bütün Bunlar?** 2 boyutlu bir görüntüye bakıp, piksellerin arkasındaki 3 boyutlu Öklid gerçeğini elde edebilmek için.
- **Projektif uzayın** esnekliği içinde dolaşırken, **Sonsuzdaki Düzlem** (π_∞ : Burnt Orange, Latin Modern Math) ve **Mutlak Çiftel Kuadrik** (Q^*_∞ : Luminous Metallic Gold, Latin Modern Math) gibi evrensel sabitleri bularak yönümüzü bulduk.
- Artık bilgisayarlı görünsün en derindeki geometrik sırlarına vakıfsınız.

